Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Investigación e Innovación Educativa en Docencia Universitaria.
Retos, Propuestas y Acciones

Edición de:

Rosabel Roig-Vila
Josefa Eugenia Blasco Mira
Asunción Lledó Carreres
Neus Pellín Buades

Prólogo de:
José Francisco Torres Alfosea
Vicerrector de Calidad e Innovación Educativa
Universidad de Alicante

ISBN: 978-84-617-5129-7

Edición de:

Rosabel Roig-Vila
Josefa Eugenia Blasco Mira
Asunción Lledó Carreres
Neus Pellín Buades

ISBN: 978-84-617-5129-7

Revisión y maquetación: Neus Pellín Buades

Tecnología de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación Matemática (TICEM)

C. Fernández Verdú; A. Buforn Lloret; M. Bernabeu Martínez; P. Ivars Santacreu; G. Sánchez-Matamoros García; M.L. Callejo de la Vega; S. Llinares Ciscar y M. Moreno Moreno

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Universidad de Alicante

RESUMEN

Desde las referencias del trabajo previo de la Red TICEM durante los últimos años, se generaron dos objetivos para el curso 2015-2016: a) Desarrollar, implementar y evaluar metodologías docentes que proporcionen una formación eficaz en competencias para la enseñanza de las matemáticas y b) Elaboración, puesta en práctica y revisión de materiales curriculares. Siguiendo una aproximación basada en experimentos de enseñanza, se han diseñado cuatro ciclos de diseño-implementación-análisis durante el curso académico 2015-2016 en diferentes asignaturas del Grado en Maestro en Educación Primaria y en el Grado en Maestro en Educación Infantil. El objetivo de los módulos de enseñanza diseñados para los programas de formación es que los estudiantes para maestro aprendan a reconocer características de la progresión del aprendizaje de los distintos conceptos matemáticos (desarrollo de la competencia una mirada profesional). En el diseño y planificación en los distintos experimentos de enseñanza consideraremos la idea de *trayectoria de aprendizaje* como referente teórico que los futuros maestros deben conocer, ya que les puede ayudar a comprender el aprendizaje de sus estudiantes y a justificar su planificación sobre la enseñanza en un momento dado.

Palabras clave: didáctica de la matemática, competencia mirar profesionalmente, experimentos de enseñanza.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de módulos de enseñanza para los programas de formación de profesores (educación primaria y educación secundaria) y la propuesta de metodologías vinculadas, tiene como objetivo promover el aprendizaje de los estudiantes para profesor en formas coherentes con el perfil profesional correspondiente. En este contexto y desde las referencias del trabajo previo de la Red TICEM durante los últimos años (Callejo, Sánchez-Matamoros, Fernández y Valls, 2014; Callejo y Zapatera, 2016; Fernández, Callejo, Valls y Llinares, 2013; Fernández, Valls, Callejo y Llinares, 2012; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Ivars, Fernández y Llinares, 2014; Llinares, 1998; 2012; Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015) se generaron dos objetivos para el curso 2015-2016: a) Desarrollar, implementar y evaluar metodologías docentes que proporcionen una formación eficaz en competencias para la enseñanza de las matemáticas y b) Elaboración, puesta en práctica y revisión de materiales curriculares.

En concreto, el grupo de formadores de maestros en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante ha colocado, desde hace algún tiempo, el énfasis en el aprendizaje del contenido matemático y del contenido de didáctica de las matemáticas que se considera relevante para el desarrollo de la competencia docente del maestro denominada "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas implica identificar los hechos que son relevantes en una situación de enseñanza de las matemáticas e interpretarlos desde el punto de vista del aprendizaje matemático pretendido, para decidir cómo apoyar la progresión en el aprendizaje del estudiante de educación primaria (Fortuny y Rodríguez, 2012; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Por otra parte, las investigaciones previas han demostrado que cuando los profesores en formación focalizan su atención en las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, en un dominio matemático concreto, desarrollan una mayor capacidad para tomar decisiones de acción (Son, 2013; Wilson, Mojica y Confrey, 2013). En este contexto, las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes (Battista, 2012) pueden ayudar a los estudiantes para maestro a identificar los objetivos de aprendizaje de su alumnado, a anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a dar respuesta utilizando una instrucción apropiada (Sztajn, Confrey, Wilson y Edgington, 2012).

Una trayectoria de aprendizaje se erige alrededor de tres componentes: un objetivo de aprendizaje, unas actividades de aprendizaje y un camino hipotético de aprendizaje (Battista, 2011; Simon, 1995) por el que transitan los estudiantes. La trayectoria de aprendizaje incluye descripciones detalladas de las actividades de aprendizaje diseñadas para apoyar a los estudiantes en la transición desde las etapas intermedias hasta las etapas superiores en las que se requiere un nivel más sofisticado de pensamiento.

En esta memoria vamos a mostrar el diseño de cuatro módulos de enseñanza que tienen como objetivo el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" en los Grados en Maestro en Educación Primaria y en Maestro en Educación Infantil. Se utiliza la idea de *trayectoria de aprendizaje* como referente teórico que los futuros maestros deben conocer, ya que les puede ayudar a comprender el aprendizaje de sus estudiantes y a justificar su planificación sobre la enseñanza en un momento dado.

2. METODOLOGÍA

Se ha seguido una aproximación basada en experimentos de enseñanza (Anderson y Shattuck, 2012; Swan, 2014). Esta metodología ha sido usada y validada por el grupo TICEM en diferentes convocatorias del proyecto de REDES. Este método sigue tres fases que forman “un ciclo de investigación” (Simon, 2000):

Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción. En esta fase se fijan los objetivos de aprendizaje y se diseñan las actividades.

Fase 2. Implementación. Esta fase corresponde a la puesta en práctica de las tareas diseñadas en la fase anterior.

Fase 3. Análisis retrospectivo. En esta fase se realiza el análisis de la experiencia desde las referencias teóricas.

Puesto que el objetivo de los módulos de enseñanza, diseñados para los programas de formación, es que los estudiantes para maestro aprendan a reconocer características de la progresión del aprendizaje de los distintos conceptos matemáticos, en el diseño y planificación en los distintos experimentos de enseñanza consideraremos:

- la descripción de un modelo de progresión del aprendizaje del estudiante en los distintos conceptos matemáticos

- la identificación de actividades y problemas susceptibles de ser usados en la educación primaria o en la educación infantil
- registros de la práctica ejemplificando las características claves de la progresión del aprendizaje de los estudiantes de primaria e infantil.

3. RESULTADOS

La sección de resultados está organizada a través de la descripción de cuatro “experimentos de enseñanza” realizados por diferentes equipos docentes durante el curso académico 2015-2016 que constituyen la red TICEM vinculados a las siguientes asignaturas:

- Grado en Maestro en Educación Infantil
    - Aprendizaje de la aritmética
- Grado en Maestro en Educación Primaria
    - Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria

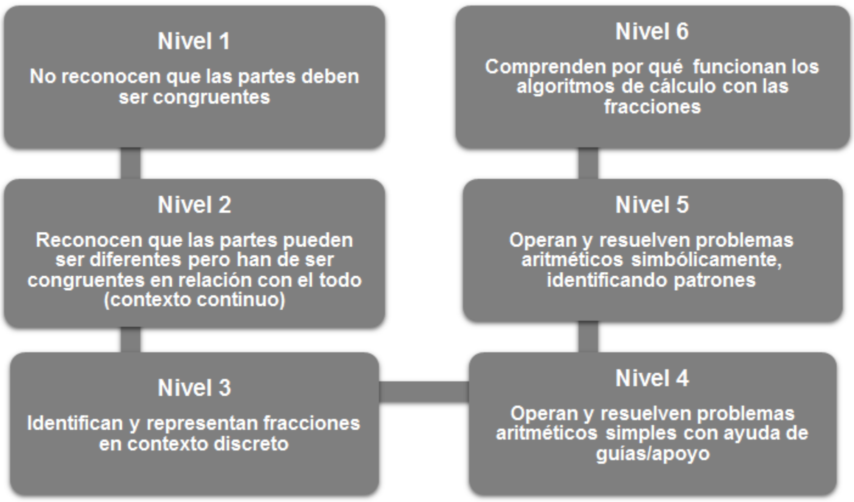
3.1. Experimento de Enseñanza 1. Grado en Maestro en Educación Primaria. Asignatura: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (6 créditos). Módulo de enseñanza: Esquema Fraccionario

Contextualización y marco de referencia

La trayectoria de aprendizaje sobre el esquema fraccionario se ha caracterizado teniendo en cuenta los estudios empíricos sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes sobre fracciones (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe y Olive, 2010. Esta caracterización incluye las operaciones de separación en unidades, partición, desanclaje e iteración así como la configuración de los esquemas que los estudiantes desarrollan en el campo del razonamiento sobre los números racionales propuestos por Steffe (2004). Además, se ha considerado el desarrollo del razonamiento de los estudiantes sobre las fracciones a través de los niveles de sofisticación postulados por Battista (2012).

El objetivo de aprendizaje se deriva del currículum de educación primaria: dar sentido a la idea de la fracción y su relación con sus diferentes representaciones, para comprender el significado de las operaciones de fracciones. Por lo que respecta al componente relacionado con el camino hipotético de aprendizaje del alumnado, hemos considerado seis diferentes niveles de comprensión (Figura 1):

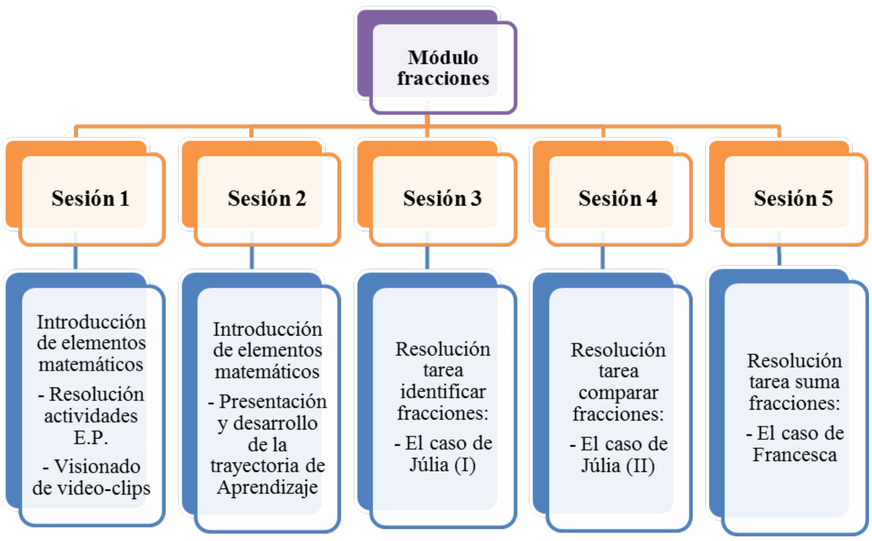
Figura 1. Niveles de comprensión del esquema fraccionario



Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción

El módulo de enseñanza diseñado consta de 5 sesiones de 2 horas cada una (Figura 2).

Figura 2. Descripción de las sesiones del módulo de enseñanza

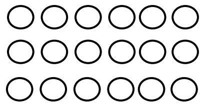


En las dos primeras sesiones se introducen los elementos matemáticos relevantes a través de la resolución y el análisis, por parte de los estudiantes para maestro, de actividades de educación primaria sobre fracciones (Figura 3) y con el visionado y discusión de diferentes videoclips en los que se pueden observar las estrategias utilizadas por estudiantes de educación primaria y las dificultades que presentan a la hora de resolver actividades este tipo de actividades. El objetivo de estas dos sesiones es ayudar a los estudiantes para maestro a focalizar su atención sobre los elementos de matemáticas que intervienen en las tareas de fracciones. Por último, se presenta la trayectoria de aprendizaje diseñada sobre el esquema fraccionario.

Figura 3. Ejemplos de actividades sobre fracciones en educación primaria

Encontrar una parte de un todo.

a) ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?



Encontrar un todo desde una parte

a) El conjunto de puntos es 3/8 del total. ¿Cuántos puntos son el total?

Encontrar una parte de otra parte

a) Ana se comió 2/3 de un pastel. Queda lo siguiente  ¿Cómo de grande era el pastel?

El objetivo de las otras tres sesiones es que los estudiantes para maestro aprendan a interpretar el pensamiento de los estudiantes teniendo en cuenta la trayectoria de aprendizaje y propongan decisiones de acción que ayuden a los estudiantes de primaria a progresar en su comprensión. De esta manera, se presentan a los estudiantes para maestro tres casos para su discusión: el caso de Júlia (I), el caso de Júlia (II) y el caso de Francesca. Los tres casos tienen la misma estructura. En primer lugar, se describe el contexto del aula. En segundo lugar, se presenta la resolución de tres estudiantes diferentes con distinto nivel de comprensión). Finalmente los estudiantes para maestro tienen que responder a cuatro preguntas profesionales que centran la atención sobre los aspectos relevantes de las respuestas de los estudiantes: en la identificando los elementos matemáticos relevantes; en la interpretación de estas respuestas (reconociendo las relaciones entre los elementos matemáticos y la comprensión de los estudiantes) y en la toma de decisiones de enseñanza (teniendo en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes):

- Describe **la tarea** en función del objetivo de aprendizaje: ¿cuáles son los elementos matemáticos que el resolutor debe usar para resolverlo?
- Describe **cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea** identificando cómo han utilizado los *elementos matemáticos* implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué **nivel de la Trayectoria de Aprendizaje** situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.

- Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja, define **un objetivo de aprendizaje y propón una actividad** para ayudar a sus alumnos progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista.

Uno de estos casos fue presentado en las *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* de la Universidad de Alicante (Ivars, Fernández y Buforn, 2016).

Fase 2. Implementación

Este módulo de enseñanza se ha implementado durante el curso académico 2015-2016 en 8 grupos, con un total de 454 estudiantes. La asignatura en la que ha sido implementado el módulo de enseñanza es *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* del Grado en Maestro en Educación Primaria.

Fase 3. Análisis retrospectivo

Este módulo de enseñanza está diseñado para desarrollar la atención de los estudiantes para maestro hacia la comprensión de sus alumnos en el dominio del esquema fraccionario. Se ha utilizado una trayectoria de aprendizaje del esquema fraccionario como referencia teórica que nos permite ofrecer a los estudiantes para maestro, diferentes respuestas de estudiantes de educación primaria que les ayuden a enmarcar situaciones prácticas a través de los procesos cognitivos de identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Aunque todavía se está en proceso de análisis de los datos, nuestra hipótesis es que este tipo de conocimiento les permitirá trasladarse desde comentarios evaluativos, basados en la corrección o incorrección de las respuestas de los estudiantes, a comentarios interpretativos basados en las evidencias observadas tras la observación de las características de los elementos matemáticos importantes evidenciados en las respuestas de los estudiantes. Finalmente, consideramos que este módulo permitirá también ayudar a los estudiantes para maestro a ofrecer actividades de instrucción coherentes con la forma en que piensan los estudiantes.

3.2. Experimento de Enseñanza 2. Grado en Maestro en Educación Primaria. Asignatura: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (6 créditos). Módulo de enseñanza: Geometría

Contextualización y marco de referencia

Para describir la progresión en el aprendizaje de la formas geométricas en educación primaria (trayectoria de aprendizaje) asumimos las referencias generales dadas por el modelo de pensamiento geométrico propuesta por van Hiele (Battista, 2007). Este modelo asume que para que el estudiante progrese a un determinado nivel debe haber superado los niveles anteriores. Según este modelo de progresión, los estudiantes están en el nivel 1 (reconocimiento) cuando sus esquemas cognitivos les permiten basarse en la apariencia física de los objetos para reconocerlos, posteriormente se considera que están en el nivel 2 (análisis) cuando sus esquemas cognitivos les permiten pensar sobre las figuras en término de sus propiedades. Luego, cuando empiezan a relacionar los atributos y generar agrupamientos/clasificaciones se considera que están en el nivel 3 (clasificación).

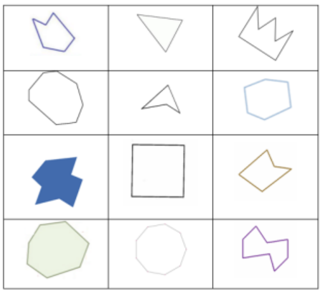
Tabla 1. Niveles de desarrollo del aprendizaje de las formas geométricas en educación primaria

N1- Identificar	Distinguen las figuras por sus formas y semejanzas físicas, sin detectar relaciones entre los mismos y sus partes (perciben las formas globalmente)
N2-Analizar	Reconocen que las figuras están formadas por elementos y están dotadas de propiedades. Son capaces de describir las partes que integran una figura y sus propiedades. Composición/descomposición
N3-Clasificar	Establecen relaciones lógicas entre propiedades, reconociendo que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir estas implicaciones

Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción

En el diseño de las tareas-prácticas para este módulo de enseñanza se ha adoptado la siguiente estructura: una actividad de educación primaria, las respuestas dadas por los niños/as de educación primaria a las diferentes actividades que reflejan características de la progresión del aprendizaje (niveles de desarrollo) y unas preguntas profesionales (Tabla 3)

Así por ejemplo, una actividad de educación primaria sería la siguiente: *Clasificar polígonos según los lados y según la concavidad o convexidad*.



En la tabla 2 se muestra la respuesta de un estudiante de educación primaria a la actividad. La tarea completa se presentó en las *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* de la Universidad de Alicante (Bernabeu y Llinares, 2016).

Tabla 2. Respuesta de un estudiante de educación primaria a la actividad

MAESTRA:	Hemos dicho que los polígonos se clasifican según el número de lados y otra manera de clasificarlos es diferenciar los que tienen boca y los que no tienen boca. Ahora te voy a dar estas fichas y tú vas a tener que colocar estas figuras según si no tienen boca que son los convexos, si tienen boca que son los cóncavos, y el número de lados. (Tras clasificarlas) Vale muy bien, explícame ¿cómo las has clasificado?
N21:	Pues en estas (señalando la columna de los convexos) he contado los lados y los he puesto donde correspondía y en estas (cóncavos) he contado todos los lados, incluso los de las bocas y los he puesto donde correspondía.
MAESTRA:	Muy bien, entonces esta, ¿por qué la has puesto aquí? (la señalada en la imagen)
N21:	Porque he contado 1, 2, 3, 4 y 5 y como tiene boca pues va en ese hueco.
MAESTRA:	Muy bien, perfecto.

Tabla 3. Preguntas profesionales que organizan el análisis de los registros de la práctica

Sobre la tarea	¿Cuáles son los objetivos de aprendizaje que subyacen en el uso de esta actividad? (¿qué es lo que se pretende que el alumno aprenda al usar esta actividad en la lección?)
Sobre el aprendizaje	Identifica las características del desarrollo de la comprensión de clasificar puesta de manifiesto por las respuestas de los dos estudiantes? En qué medida las respuestas de los estudiantes ponen de manifiesto la relación entre los atributos considerados en las figuras geométricas (cóncavos/convexos, número de lados, …)
Sobre la enseñanza	¿Qué actividad propondrías en cada caso para apoyar la progresión de los estudiantes del proceso de clasificar figuras geométricas?.

Fase 2 y 3. Implementación y Análisis retrospectivo

La implementación y análisis de este módulo de enseñanza está programada para el curso 2016-2017. Se espera mostrar resultados de este módulo en las próximas Jornadas de Redes en Docencia Universitaria.

3.3. Experimento de Enseñanza 3. Grado en Maestro en Educación Primaria. Asignatura: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (6 créditos). Módulo de enseñanza: Razonamiento proporcional

Contextualización y marco de referencia

El módulo de Razonamiento Proporcional se llevó a cabo durante el curso académico 2014-2015 en 8 grupos, con un total de 475 estudiantes. La asignatura en la que ha sido implementado el módulo de enseñanza es *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* del Grado en Maestro en Educación Primaria y consistía en 4 sesiones de 2 horas cada una. El diseño de módulo fue presentado en las *XIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* de la Universidad de Alicante (Fernández y Buforn, 2015).

En esta memoria solo se presentan los resultados de la fase de análisis de este módulo de enseñanza. En particular los resultados correspondientes a la tarea profesional en relación al concepto de razón. Esta tarea consistía en un problema de educación primaria en relación al concepto de razón, tres respuestas de estudiantes con distintas características de su comprensión (Figura 4) y las siguientes preguntas profesionales:

a) *¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta tarea? Justifica tu respuesta.*
b) *¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas?*
c) *Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para ayudarle a que comprendiese estos conceptos?*
d) *Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para que aumente su comprensión de los conceptos implicados?*

Figura 4. Problema y respuestas de estudiantes de primaria

1. En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:
   a. 7.5 metros por 11.4 metros
   b. 4.55 metros por 5.08 metros
   c. 18.5 metros por 24.5 metros

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta 1

$\frac{7'5}{11'4} = 0'65$

$\frac{4'55}{5'08} = 0'89$ → Es el más cuadrado ya que es el número más cercano a 1.

$\frac{18'5}{24'5} = 0'75$

Respuesta 2

$\frac{7'5}{11'4} = 0'658$ $\frac{18'5}{24'5} = 0'755$

$\frac{4'55}{508} = 0'896$ En proporción 4'55 por 508 existe menor diferencia por lo que será más cuadrada al tener lados más iguales

Respuesta 3

* El cuadrado se caracteriza por tener los lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tengan menos distancia de metros, es decir:

• $11'4 - 7'5 = 03'9$ • $5'08 - 4'55 = 0'53$ • $24'5 - 18'5 = 06'0$

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

Fase 3. Análisis retrospectivo

Las tareas utilizadas en el módulo de enseñanza ayudaron a los estudiantes para maestro a desarrollar la competencia profesional que tiene que tener un maestro para reconocer evidencias de la comprensión en sus estudiantes y proponer nuevas tareas para apoyar la progresión de la comprensión en sus estudiantes.

Esto se puso de manifiesto cuando los estudiantes para maestro reconocían el concepto matemático implicado en la tarea (razón como medida), es decir, la aproximación de la razón a 1. El estudiante para maestro de la Figura 5 identifica la razón como medida al comentar que es un problema de comparación de razones donde se deben comparar los lados de un cuadrado y ver el que más se aproxima a 1, dado que la razón entre lo lados de un cuadrado es 1.

Figura 5. Respuesta de un estudiante para maestro a la cuestión *a)*

Es un problema de proporcionalidad, específicamente de comparación de razones, donde para realizar esta tarea debe conocer diferentes aspectos como: que los lados de un cuadrado son iguales y que la razón de proporcionalidad de los lados de un cuadrado es 1, por lo tanto, el resultado de la división de los lados de un rectángulo que se asemeje a un cuadrado debe ser próximo a 1.

Además, los resultados muestran que los estudiantes para maestro reconocieron la razón como medida en las respuestas de los estudiantes y diferenciaron entre las diferentes características de cada una de las respuestas. Por ejemplo, el estudiante para maestro de la Figura 5 reconoce en la respuesta 1 del estudiante el uso de la aproximación de la razón a 1 para poder obtener la solución. En la respuesta 2 identifica el uso de razones para comparar pero se da cuenta de que el estudiante no se basa en la aproximación a 1, sino en la diferencia entre los lados de los *lofts*. Y en la respuesta 3 identifica la estrategia aditiva incorrecta.

Figura 6. Respuesta de un estudiante para maestro a la cuestión b)

b) Respuesta 1: El alumno lleva a cabo la ejecución del problema de forma correcta, ya que comprende que es un problema proporcional y realiza una comparación de razones escogiendo como resultado la comparación que se acerca más a 1.

Respuesta 2: El alumno entiende que debe realizar una comparación de razones, pero no comprende que el resultado correcto es el que está más cercano a 1. Éste considera que el resultado correcto es aquella razón en la cual entre el numerador y denominador hay una menor diferencia.

Respuesta 3: El alumno no comprende que debe realizar una comparación entre las razones y lleva a cabo la realización de restas. En este caso considera que el resultado correcto es aquel en el cual los lados son más similares, es decir 5.08 y 4.55 ya que en el cuadrado todos los lados son iguales.

Respecto a las decisiones de acción, los estudiantes para maestro fueron capaces de proponer cambios tanto para hacer las tareas más fáciles (para ayudar a los estudiantes de primaria que tenían dificultades con el contenido) o más difíciles (para ayudar a los estudiantes a progresar en su comprensión del contenido). Algunas de estas decisiones fueron mostradas en las *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* de la Universidad de Alicante (Buforn, Fernández y Ivars, 2016).

3.4. Experimento de Enseñanza 4. Grado en Maestro en Educación Infantil. Asignatura: Aprendizaje de la Aritmética (6 créditos). Módulo de enseñanza: Medida

Contextualización y marco de referencia

En este módulo de enseñanza nos centraremos en la magnitud longitud en Educación Infantil. Los conceptos de magnitud y el de medida de dicha magnitud son importantes desde las primeras etapas de la educación infantil, en el sentido que todos, desde pequeños, comenzamos a relacionarnos con el entorno que nos rodea, y con ello comenzamos a apreciar cualidades de los objetos (lleno-vacío, largo-corto, grande-pequeño, etc.) y más tarde, tenemos la necesidad de realizar comparaciones entre objetos atendiendo a dichas cualidades (más lleno que…, tan largo como…, menos grande que…., etc.), o resolver problemas relacionados con alguna magnitud y su medida.

El objetivo de aprendizaje lo podemos extraer de lo que el currículo de Educación Infantil indica como objetivo en relación a las magnitudes y su medida: *Identificar algunas de las propiedades más significativas de los elementos de su entorno inmediato estableciendo relaciones cualitativas y cuantitativas entre ellas que induzcan a organizar y comprender progresivamente el mundo en que vive.*

Aquí nos vamos a centrar en cómo conseguir algunas partes del objetivo de aprendizaje derivado del currículo. En particular:

- Identificar la longitud como una propiedad de los elementos del entorno, y
- Establecer relaciones cualitativas y cuantitativas que permitan comprender la medida de la longitud

El aprendizaje de la magnitud longitud y su medida sigue una trayectoria, formada por cinco niveles, que se muestra en la tabla 4. Esta trayectoria está basada en los estadios, para el desarrollo de la comprensión de cualquier magnitud y su medida, propuestos por Piaget. Estos niveles tienen un carácter acumulativo (En el nivel 2 se dan las características del nivel 1, en el nivel 3, las del 1 y el 2, y así sucesivamente).

Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción

El módulo de enseñanza consta de 5 sesiones de una duración de 100 minutos. En la primera sesión se proporcionó a los estudiantes para maestro información teórico-práctica relativa a la construcción de la noción de magnitud longitud y su medida y una tarea profesional. La información teórica fue organizada a través de la trayectoria de aprendizaje cuyo *objetivo de aprendizaje* y *niveles de desarrollo de la comprensión* han sido mostrados anteriormente.

Tabla 4. Niveles de desarrollo de la comprensión de la magnitud longitud y su medida (Sarama y Clements, 2009)

<table>
<tr><td>Nivel</td><td>Progresión del desarrollo</td><td rowspan="4">Del reconocimiento de la magnitud longitud como un atributo de los objetos hasta la propiedad transitiva</td></tr>
<tr><td>1</td><td>• Reconocen la magnitud longitud
- Identifican las cualidades de la magnitud longitud.
• Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• Reconocen la conservación de la longitud.
- Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• Utilizan la propiedad transitiva para realizar:
- Comparaciones indirectas
- Ordenaciones de objetos.
- Medidas de longitudes.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Realizan equiparticiones de objetos.
• Identifican una unidad y realizan iteraciones de la misma.
- Reconocen la propiedad de acumulación.</td><td rowspan="2">Constitución de la idea de unidad de medida de longitud</td></tr>
<tr><td>5</td><td>• Reconocen la universalidad de la unidad de medida.
• Reconocen la relación entre número y unidad de medida.
• Comienzan a hacer estimaciones.</td></tr>
</table>

En la segunda sesión, a partir de las respuestas dadas por los estudiantes para maestro a la tarea profesional, se trabajó tanto el documento teórico como la propia tarea profesional. En las restantes sesiones se plantearon a los estudiantes para maestro de educación infantil tres tareas profesionales más. Las tareas profesionales planteadas estaban compuestas por situaciones de enseñanza en las que se aprecia cómo un grupo de niños de infantil realizan actividades sobre magnitud longitud y su medida. Cada una de las situaciones de enseñanza se complementa con cuestiones profesionales que hacen referencia a las destrezas de identificar los elementos matemáticos, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los niños en las situaciones de enseñanza y proponer decisiones de acción (tareas) para que los niños avancen en su comprensión.

- Justifica las **características de la comprensión** puestas de manifiesto en cada una de las viñetas indicando los **elementos matemáticos** que están implícitos.
- Según las características de la comprensión identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** situarías a los niños que participan en las viñetas? Justifica tu respuesta.

- Suponiendo que eres la maestra de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje y** propón **una tarea** para seguir profundizando en la comprensión de la magnitud longitud y su medida.

En las *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria* de la Universidad de Alicante se mostró el diseño de la primera tarea profesional (Sánchez-Matamoros, Moreno, Callejo y Valls, 2016) que se trabajó en la sesión 1. Esta tarea consistía en visionar y analizar fragmentos extraídos del video "Young children learn measurement" correspondiente a una clase de infantil (4-5 años) (Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, 2005) donde se muestran, a través de 4 viñetas, cómo están realizando los niños de infantil actividades sobre la magnitud longitud con el objetivo de que construyan la noción de la magnitud longitud (altura).

Fase 2. Implementación

Este módulo de enseñanza se ha implementado durante el curso académico 2015-2016 en 8 grupos, con un total de 403 estudiantes. La asignatura en la que ha sido implementado el módulo de enseñanza es *Aprendizaje de la aritmética* del Grado en Maestro en Educación Infantil.

Fase 3. Análisis retrospectivo

Tras los primeros análisis, los resultados proporcionan evidencias de cómo los estudiantes para maestro de educación infantil han identificado los elementos matemáticos, han establecido los niveles de comprensión de los estudiantes de educación infantil y han propuesto decisiones de acción, lo que nos ha permitido agruparlos en 3 categorías:

- No identifica los elementos matemáticos ni las características de la comprensión
- No identifica los elementos matemáticos y sí las características de la comprensión
- Sí identifica los elementos matemáticos y las características de la comprensión

Nuestros resultados están mostrando que el reconocimiento explícito de los elementos matemáticos y de las características de la comprensión de la magnitud longitud y su medida de los niños de infantil, posibilita a los estudiantes para maestro valorar el papel que juegan las transiciones entre los diferentes niveles del desarrollo de la comprensión, y favorecer, en algunos casos, la toma de decisiones de enseñanza vinculadas al nivel de comprensión de la magnitud longitud y su medida.

4. REFLEXIONES FINALES

Esta sección se divide en dos partes. En la primera parte se realiza una reflexión sobre la metodología seguida y los experimentos de enseñanza diseñados por los equipos docentes. En segundo lugar se describen las dificultades, mejoras y prospectiva de futuro a partir del trabajo realizado durante el curso 2015-2016.

4.1. Reflexión sobre la metodología seguida y los experimentos de enseñanza realizados

El diseño de los módulos de enseñanza en el programa de formación de maestros con el objetivo de desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza se apoya en la identificación del conocimiento de la trayectoria de aprendizaje de tópicos curriculares, y que se debe aprender a usar en tareas profesionales como

- reconocer lo relevante en una situación,
- interpretarlo (dar sentido a la situación), y
- tomar decisiones para continuar la enseñanza con el objetivo de apoyar la progresión en el aprendizaje de los estudiantes.

El diseño y uso de actividades vinculadas a desarrollar la competencia docente del maestro *mirar profesionalmente* pone de manifiesto el vínculo entre la necesidad de explicitar los procesos y conceptos matemáticos que están implícitos en la resolución de determinadas tareas como paso previo a la tarea de reconocer evidencias de la comprensión por parte de los estudiantes.

Además, este tipo de tareas ayuda a los estudiantes para maestro a crear situaciones en las que pueden aprender el conocimiento necesario para enseñar matemáticas simulando las situaciones en las que dicho conocimiento debe ser usado (interpretar las producciones de los estudiantes y proponer nuevas tareas de enseñanza).

Podemos concluir que, en el ámbito de la didáctica de la matemática, los experimentos de enseñanza basados en modelos de aprendizaje del maestro constituyen un contexto adecuado para la generación de materiales docentes testados científicamente y para el desarrollo de agendas de investigación sobre el aprendizaje de los maestros.

4.2. Dificultades, propuestas de mejora y previsión de continuidad

No se han encontrado dificultades ni en relación a la implicación de los miembros de la Red TICEM en cada equipo docente, ni en relación al reparto de las tareas, metodología o formación de los participantes.

En relación a la previsión de continuidad, la Red TICEM seguirá constituyéndose en las futuras ediciones de Redes. Para el próximo curso académico se espera presentar los resultados y propuestas de mejora de los experimentos de enseñanza diseñados.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, T. y Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A decade of Progress in Education Research? *Educational Researcher, 41*(1), 16-25.

Battista, M.T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En F.K. Lester, Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 843-908). Reston, VA-Charlotte, NC: NCTM-IAP.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and Issues Related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiasts, 8*(3), 507-570.

Battista, M.T. (2012). *Cognition-based assessment and teaching geometric shapes: building on students' reasoning*. Heinemann: New York.

Bernabeu, M. y Llinares, S. (2016). El desarrollo de una “mirada profesional”: La idea de trayectoria de aprendizaje del pensamiento geométrico. *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* Universidad de Alicante.

Buforn, A., Fernández, C. y Ivars, P. (2016). Desarrollo de una mirada profesional en un módulo sobre la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional. *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* Universidad de Alicante.

Callejo, M.L., Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Valls, J. (2014). Cómo desarrollar una mirada profesional en futuros profesores de matemáticas. *XII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* Universidad de Alicante.

Callejo, M.L., y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalizations. *Journal of Mathematics Teacher Education,* DOI 10.1007/s10857-016-9343-1

Fernández, C. y Buforn, A. (2015). Un módulo de enseñanza centrado en desarrollar el conocimiento necesario para enseñar el razonamiento proporcional. *XIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* Universidad de Alicante.

Fernández, C., Callejo, M.L., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Uso de videoclips para aprender a enseñar matemáticas a los futuros maestros. En M. T. Tortosa, J. D. Álvarez, N. Pellín (Coords.), *XI Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria [Recurso electrónico]: Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e investigación para alcanzar la excelencia académica* (pp. 484-497). Vicerrectorado de Planificación Estratégica y Calidad- Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Alicante.

Fernández, C., Valls, J., Callejo, M.L., y Llinares, S. (2012). Uso de la herramienta “grupos de trabajo” para la coordinación docente. En M.T. Tortosa, J.D. Álvarez, N. Pellín (coords.), *X Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria [Recurso electrónico]: la participación y el compromiso de la comunidad universitaria* (pp.347-357). Vicerrectorado de Planificación Estratégica y Calidad- Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Alicante.

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students’ mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44*, 747-759.

Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.

Ivars, P., Fernández, C. y Buforn, A (2016). Mirar profesionalmente el pensamiento matemático sobre fracciones a través de una trayectoria de aprendizaje. *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* Universidad de Alicante.

Ivars, P.J., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). El papel de las narrativas en el desarrollo de una mirada profesional en futuros maestros de primaria. *XII*

Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Universidad de Alicante.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* 41(2), 169-202.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53 – 70.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 17, 51-63.

Llinares, S. Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service Teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education, 13,* 1305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deloufeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Callejo, M.L. y Valls, J. (2016). La medida en el Grado en Maestro en Educación Infantil: Desarrollo de un módulo de enseñanza. *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria.* Universidad de Alicante.

Sarama J. y Clements D.H. (2009). Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children. London and New York: Routledge (Geometric Measurement, Part 1: Length, pp. 273-292).

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education,* 114-145.

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (eds), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Pubs.

Son, J. (2013). How pre-servive teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles, *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 49-70.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge.* New York: Springer.

Swan, M. (2014). Design Research in mathematics Education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.148-152). Dordrecht: Springer.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H. y Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-595.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. TAL Project.* Freudenthal Institute, Utrech University and National Institute for Curriculum Development. Utrech. The Netherlands.

Wilson, P.H., Mojica, G.F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32,* 103-121.